Ciąg geometryczny – metoda rozwiązywania równań rekurencyjnych

Janusz MATKOWSKI

Niech $\mathbb{C}$ oznacza zbiór liczb zespolonych. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ liczb zespolonych nazywany jest geometrycznym, jeśli istnieje takie $q \in \mathbb{C}$, że
$$x_n = x_0 q^n, \qquad n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Uwaga. *Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ liczb zespolonych jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$x_{n+1} = qx_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zobaczymy, że ten zupełnie oczywisty fakt pozwala w prosty sposób rozwiązywać równania rekurencyjne

(1) $$x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$, oraz $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, $a_0 \neq 0$, są ustalone.

Rozważmy najpierw przypadek $k = 2$. Niech p, q będą takimi liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi, że
$$p + q = a_1, \qquad pq = -a_0.$$
Wtedy równanie (1) możemy zapisać w postaci

(2) $$x_{n+2} = (p+q)x_{n+1} - pqx_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Przypuśćmy, że $p \neq q$. Zapisując to równanie na dwa sposoby:
$$x_{n+2} - qx_{n+1} = p\,(x_{n+1} - qx_n), \qquad n \in \mathbb{N}_0;$$
$$x_{n+2} - px_{n+1} = q\,(x_{n+1} - px_n), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$
stwierdzamy, że ciągi
$$(x_{n+1} - qx_n)_{n=0}^{\infty}, \qquad (x_{n+1} - px_n)_{n=0}^{\infty}$$
są geometryczne, a więc
$$x_{n+1} - qx_n = (x_1 - qx_0)p^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$
$$x_{n+1} - px_n = (x_1 - px_0)q^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Odejmując stronami te równania, otrzymujemy szukane rozwiązanie
$$x_n = x_1\frac{p^n - q^n}{p - q} - x_0 pq\frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p - q}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Gdy q dąży do p, otrzymujemy ciąg
$$x_n = [(x_1 - px_0)n + px_0]p^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$
który jest rozwiązaniem równania (2) w przypadku, gdy $q = p$.

Ostatnie dwa wzory dają pełne rozwiązanie równania rekurencyjnego (2).

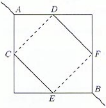
W podobny sposób możemy rozwiązywać równania rekurencyjne, gdy $k > 2$. Jeśli np. $k = 3$, to równanie (1) możemy napisać w postaci

(3) $$x_{n+3} = (p+q+r)x_{n+2} - (qr + rp + pq)x_{n+1} + pqrx_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie p, q, r są takimi liczbami zespolonymi, że
$$p + q + r = a_2, \qquad qr + rp + pq = -a_1, \qquad pqr = a_0.$$

Rozpocznijmy od przypadku, gdy p, q i r są parami różne. Zapisując równanie (3) na trzy sposoby:
$$x_{n+3} - (q+r)x_{n+2} + qrx_{n+1} = p\,[x_{n+2} - (r+q)x_{n+1} + qrx_n], \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$
$$x_{n+3} - (r+p)x_{n+2} + rpx_{n+1} = q\,[x_{n+2} - (r+p)x_{n+1} + rpx_n], \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$
$$x_{n+3} - (p+q)x_{n+2} + pqx_{n+1} = r\,[x_{n+2} - (p+q)x_{n+1} + pqx_n], \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

Rozwiązanie zadania F 575.
Jeśli do punktów A i B przyłoży się jakieś napięcie, potencjały w punktach C i D oraz E i F będą równe.



Zatem odcinki CD i EF można pominąć w rozważaniach. Opór pozostałych części figury jest równy
$$R_{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\rho + \frac{a\rho\frac{a}{\sqrt{2}}\rho}{a\rho + \frac{a}{\sqrt{2}}\rho} + \frac{a}{2}\rho\right) = \frac{a\rho}{\sqrt{2}}.$$

stwierdzamy, że ciągi w nawiasach prostokątnych są geometryczne, a więc

$$x_{n+2}-(q+r)x_{n+1}+qrx_n=[x_2-(q+r)x_1+qrx_0]p^n;$$
$$x_{n+2}-(r+p)x_{n+1}+rpx_n=[x_2-(r+p)x_1+rpx_0]q^n;$$
$$x_{n+2}-(p+q)x_{n+1}+pqx_n=[x_2-(p+q)x_1+pqx_0]r^n.$$

Związki te tworzą układ równań liniowych z niewiadomymi x_{n+2}, x_{n+1}, x_n.

Eliminując x_{n+2}, x_{n+1} (lub stosując twierdzenia Cramera), otrzymujemy stąd

$$x_n=\frac{p^n(r-q)+q^n(p-r)+r^n(q-p)}{p^2(r-q)+q^2(p-r)+r^2(q-p)}x_2-$$
$$-\frac{p^n(r^2-q^2)+q^n(p^2-r^2)+r^n(q^2-p^2)}{p^2(r-q)+q^2(p-r)+r^2(q-p)}x_1+$$
$$+pqr\frac{p^{n-1}(r-q)+q^{n-1}(p-r)+r^{n-1}(q-p)}{p^2(r-q)+q^2(p-r)+r^2(q-p)}x_0,\ n\in\mathbb{N}_0.$$

Aby rozwiązać równanie (3) w przypadku, gdy $r=p\neq q$, wystarczy w powyższym wzorze dokonać przejścia granicznego z r do p.

Otrzymamy wtedy

$$(4)\quad x_n=\frac{(p-q)np^n+pq^n}{p(p-q)^2}x_2-\frac{(p^2-q^2)np^n-2p^2(p^n-q^n)}{p(p-q)^2}x_1+$$
$$+\frac{q(p-q)(n-1)p^n+p^2q^n}{p(p-q)^2}x_0,\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Ponieważ w tym wzorze nie istnieje granica współczynnika przy x_2, gdy q dąży do p, więc przypadek $p=q=r$ wymaga dodatkowych rozważań. Teraz równanie (3) ma postać

$$x_{n+3}=3px_{n+2}-3p^2x_{n+1}+p^3x_n,\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Zapisując je w równoważnej formie

$$x_{n+3}-2px_{n+2}+p^2x_{n+1}=p(x_{n+2}-2px_{n+1}+p^2x_n),\quad n\in\mathbb{N}_0$$

widzimy, że ciąg $(x_{n+2}-2px_{n+1}+p^2x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest geometryczny, a więc

$$x_{n+2}-2px_{n+1}+p^2x_n=(x_2-2px_1+p^2x_0)p^n,\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Biorąc tutaj

$$y_n:=x_{n+1}-px_n,\ n\in\mathbb{N}_0,\qquad c:=x_2-2px_1+p^2x_0,$$

otrzymujemy

$$y_{n+1}-py_n=cp^n,\qquad n\in\mathbb{N}_0.$$

Stąd, dla dowolnie ustalonego $k\in\mathbb{N}$,

$$y_k-p^ky_0=\sum_{n=0}^{k-1}p^{k-1-n}(y_{n+1}-py_n)=c\sum_{n=0}^{k-1}p^{k-1}=ckp^{k-1},$$

a więc $y_k=y_0p^k+ckp^{k-1}$ i, w konsekwencji,

$$x_{n+1}-px_n=y_0p^n+cnp^{n-1},\qquad n\in\mathbb{N}_0.$$

Podobnie, ustalając dowolnie $k\in\mathbb{N}$, otrzymujemy stąd

$$x_k-p^kx_0=\sum_{n=0}^{k-1}p^{k-1-n}(x_{n+1}-px_n)=\sum_{n=0}^{k-1}p^{k-1-n}(y_0p^n+cnp^{n-1})=$$
$$=y_0\sum_{n=0}^{k-1}p^{k-1}+c\sum_{n=1}^{k-1}np^{k-2}=y_0kp^{k-1}+c\frac{(k-1)k}{2}p^{k-2}.$$

Zatem, dla $n\in\mathbb{N}_0$,

$$x_n=x_0p^n+y_0np^{n-1}+c\frac{(n-1)n}{2}p^{n-2}=$$
$$=\frac{(n-1)np^{n-2}}{2}x_2-(n-2)np^{n-1}x_1+\frac{(n-2)(n-1)p^n}{2}x_0.$$

Uwaga. Przedstawiona metoda wymaga znajomości pierwiastków wielomianu

$$t^k-a_{k-1}t^{k-1}-\ldots-a_1t-a_0,$$

zwanego wielomianem charakterystycznym równania rekurencyjnego (1).